



REDUÇÃO DE REGIÕES DE VALORES INTERMEDIÁRIOS DE DENSIDADE NA OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE ESTRUTURAS CONTÍNUAS

Eduardo Lenz Cardoso

edlenz@gmap.mecanica.ufrgs.br

Jun S. O. Fonseca

Grupo de Mecânica Aplicada - Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Rua Sarmiento Leite, 425, Porto Alegre - RS, 90050-150, Brasil.

***Resumo.** Um dos problemas da otimização topológica de estruturas é a existência de regiões de valores intermediários da variável de projeto, fato que dificulta uma interpretação unívoca da configuração final. Existem diversas alternativas para amenizar este problema, tais como: a penalização da função custo ou a da relação constitutiva e o tratamento digital de imagens, com o objetivo de restringir o gradiente da variável de projeto. Este trabalho mostra a otimização topológica de estruturas contínuas em duas dimensões, com o objetivo de reduzir o volume da estrutura tendo como restrição a flexibilidade. É estudada a utilização de uma função do volume como parâmetro de desempenho da estrutura, resultando, mesmo sem filtragem, em topologias com uma pequena proporção de valores intermediários da variável de projeto. O método dos elementos finitos é utilizado para calcular o comportamento da estrutura. Os elementos utilizados foram triangulares e quadrangulares. Formulou-se a otimização de estruturas contínuas na qual a variável de projeto é apenas a densidade. Utilizou-se um esquema de filtragem e um controle de gradiente de densidade que permitem controlar a complexidade da configuração final, além de evitar problemas de instabilidade de tabuleiro (checkerboard) em malhas com elementos de baixa ordem. Os parâmetros do filtro e do controle de gradientes são espaciais, garantindo a independência da discretização no resultado final. Os resultados são comparados com a literatura, demonstrando a validade da formulação aqui proposta.*

***Palavras-chave:** Otimização , Topologia, Filtragem, Controle de Gradiente.*

1. INTRODUÇÃO

A otimização topológica tem como objetivo estudar a conectividade ótima dos elementos de uma estrutura submetida a carregamentos e a condições de contorno pré-estabelecidas. Assim, uma vez estabelecido o domínio de projeto, carregamentos e condições de contorno, a otimização topológica irá estabelecer quais são as regiões que irão conter material e quais

as regiões que irão ficar vazias (Bendsøe,1995).

Ao contrário da otimização de forma, a otimização topológica permite efetivamente obter furos na peça, o que significa remoção de material. Ainda, a otimização topológica, por ser muito sensível às condições de contorno e ao carregamento (Bendsøe,1995), permite uma investigação da influência da posição do carregamento e das condições de contorno na fase de concepção de um projeto.

A introdução de microestruturas parametrizadas na formulação da otimização topológica propiciou um grande salto no desenvolvimento desta área. Com isto obtiveram-se topologias ótimas, nem sempre práticas do ponto de vista da engenharia. Por este motivo, buscaram-se alternativas que permitam obter topologias sub-ótimas, minimizando a presença de material composto, o que facilita a interpretação e construção da topologia obtida. Diversos autores utilizam penalizações do tensor constitutivo (Bendsøe,1995) juntamente com a tradicional formulação de minimização de flexibilidade com restrição de volume. Ainda do ponto de vista da engenharia, um controle sobre a complexidade da topologia final é sempre desejável uma vez que custos de produção estão diretamente envolvidos com a complexidade geométrica.

O objetivo principal dos projetistas é reduzir o custo final de seus projetos. Geralmente um dos indicadores de custo é a quantidade de material empregado, principalmente na indústria aeronáutica. Assim, a escolha do volume da estrutura como função objetivo, juntamente com uma penalização que não age sobre o tensor constitutivo, permite obter topologias com pequenas áreas de densidade intermediária. Devido ao grande custo computacional do processo de otimização, uma abordagem que utiliza apenas uma variável de projeto, tal como a abordagem direta por densidades, permite obter a topologia com menos tempo de processamento.

Este trabalho utiliza elementos finitos de baixa ordem, juntamente com controles de gradiente, que permitem obter topologias bem definidas e sem a presença de instabilidades, tais como a instabilidade de tabuleiro (Díaz & Sigmund, 1995). Ainda, é proposta uma técnica de controle de topologia, onde o usuário pode controlar a variação da densidade ao longo do domínio de projeto (gradiente da variável de projeto). Embora os métodos aqui apresentados sejam gerais, podendo ser aplicados em problemas tridimensionais, serão apresentados somente resultados bidimensionais, devido ao menor tempo de processamento e facilidade de visualização.

2. EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO DA ELASTICIDADE 2D

Para simplificar a apresentação da teoria e conceitos, somente problemas de estado plano de tensão serão considerados. A hipótese de estado plano de tensões remete a algumas simplificações cinemáticas

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, x_3) &\cong u(x_1, x_2) \\ u_2(x_1, x_2, x_3) &\cong v(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3) &\cong \Psi(x_3)w(x_1, x_2) \end{aligned} \tag{1}$$

onde u_1 , u_2 e u_3 são os deslocamentos nas direções ortogonais do sistema cartesiano de coordenadas.

Utilizando a abordagem direta por densidades (Bendsøe,1995), o tensor constitutivo é parametrizado diretamente por uma densidade ρ , de acordo com a Eq. (2),

$$\begin{aligned}
\rho &\in L^\infty(\Omega) \\
E_{ijkl}(x) &= \rho(x) E_{ijkl}^0 \\
\int_{\Omega} \rho d\Omega &\leq V_0 \\
0 &\leq \rho \leq 1
\end{aligned} \tag{2}$$

onde E_{ijkl} é o tensor constitutivo de quarta ordem da elasticidade isotrópica linear e V_0 é o volume total do domínio. Esta parametrização corresponde ao limite superior (inatingível) das propriedades de uma mistura (Swan & Kosaka, 1997).

De acordo com o princípio da energia potencial total, podemos obter o funcional da Eq. (3) onde a densidade ρ é introduzida por meio do tensor constitutivo \mathbf{E} .

$$\Pi = \int_V \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon} dV - \int_{\Gamma} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} d\Gamma \tag{3}$$

O vetor \mathbf{t} representa as forças externas que agem sobre o corpo e o vetor \mathbf{u} representa o vetor de deslocamentos. São consideradas somente deformações infinitesimais $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Da minimização do funcional da Eq. (3) em relação aos deslocamentos, juntamente com a conveniente interpolação do campo de deslocamentos, obtemos a equação de equilíbrio (4) da aproximação por elementos finitos, implícita com a densidade ρ .

$$\mathbf{K}(\rho)\mathbf{u}(\rho) = \mathbf{f} \tag{4}$$

onde $\mathbf{K}(\rho)$ é matriz de rigidez, $\mathbf{u}(\rho)$ é o vetor de deslocamentos e \mathbf{f} é o vetor de forças da estrutura.

Neste trabalho são utilizados os elementos retangulares isoparamétricos de quatro nós e os elementos triangulares GT9 (Yuqiu & Yin, 1994), com graus de liberdade de rotação de membrana. Ambos os elementos são de baixa ordem, o que propicia o aparecimento da instabilidade de tabuleiro.

3. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

A abordagem direta por densidades tem a tendência de gerar muitas áreas com densidades intermediárias, que correspondem a regiões com material “composto” isotrópico. O aparecimento dessas regiões dificulta a interpretação da topologia final, o que não é desejável. (Bendsøe,1995) propõe uma parametrização alternativa a apresentada na Eq. (2), onde a densidade ρ é penalizada por um expoente n , de acordo com a Eq. (5).

$$E_{ijkl}(x) = \rho(x)^n E_{ijkl}^0 \tag{5}$$

Essa penalização, que age diretamente sobre o tensor constitutivo, tem como objetivo fazer com que valores intermediários de densidade impliquem em um alto custo da função objetivo, o que tende a gerar topologias com poucas áreas de densidades intermediárias. No entanto, a interpretação da topologia obtida não pode mais ser realizada sobre a distribuição de densidades pois a relação dada pela Eq. (5) é não linear, o que pode provocar interpretações equivocadas da topologia final.

Com a mesma parametrização do tensor constitutivo, sem penalização, Eq. (2), é proposta a minimização de volume, com restrição de flexibilidade, de acordo com a Eq.(6):

$$\begin{aligned} \text{Min } V &= f(\rho^n) & (6) \\ \text{su}j & & F_k \leq F_{lim_k} \\ k &= & 1..nc \end{aligned}$$

onde V é o volume total do corpo, F_k é a flexibilidade correspondente ao carregamento k , F_{lim_k} é a restrição de flexibilidade correspondente ao caso de carregamento k e nc é o número de casos de carregamento. O volume é colocado como uma função da densidade ρ , penalizada por um expoente n , que não possui nenhum relacionamento com o expoente da Eq. (5). A função deste expoente é penalizar a função objetivo, sem nenhum efeito sobre o tensor constitutivo. De forma discreta, a formulação da Eq. (6) pode ser apresentada como

$$\begin{aligned} \text{Min } \sum_{i=1}^{nc} \rho_i^n t_i A_i & & (7) \\ \text{Su}j & & f_k^T u_k \leq F_{limite_k} \\ k &= & 1..nc \end{aligned}$$

Os resultados obtidos com esta formulação contém poucas áreas com densidade intermediária, sem mascarar a relação entre o módulo de elasticidade e a densidade (Fonseca, 1998). Uma boa escolha para o expoente de penalização n é de 1/8, selecionado heurísticamente.

4. IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DO PROCEDIMENTO DE OTIMIZAÇÃO

Neste trabalho é utilizada a abordagem direta por densidades, que assume que as propriedades do material são simplesmente uma fração das propriedades do material base, de acordo com a Eq. (2). A variável de proporção ρ é a variável de projeto do problema de otimização, podendo assumir valores na faixa $[10^{-3}, 1]$. Valores muito baixos de ρ podem acarretar instabilidades numéricas na solução por elementos finitos.

O algoritmo de otimização utilizado é a programação matemática linear seqüencial, SLP, disponível na biblioteca de métodos numéricos SLATEC (Hanson & Hierbert, 1981). A escolha desse método se deve à facilidade de operação, ao número de bibliotecas numéricas disponíveis e ao fato de ser um método solidamente estabelecido na literatura. A chave para utilização do SLP é limitar a variação das variáveis de projeto a cada iteração, de modo que os gradientes obtidos no ponto inicial se mantenham precisos, dentro de uma faixa linear. A estratégia de filtragem deste trabalho é aplicada sobre os limites móveis da variável de projeto, restringindo os seus gradientes (Fonseca, 1998).

5. FILTROS E CONTROLES DE GRADIENTE

Para evitar a presença da instabilidade de tabuleiro (*checkerboard*), muitos pesquisadores têm utilizado elementos finitos de alta ordem (Fernandes, 1992), ou técnicas de filtragem que suavizam a distribuição da variável de projeto ao longo do domínio (Swan & Kosaka, 1997). Devido ao grande tempo de processamento inerente ao processo de otimização, a utilização de elementos de alta ordem se torna proibitiva. Isso leva à necessidade de se

utilizarem processos de filtragem para obter uma topologia sem a presença da instabilidade de tabuleiro.

Neste trabalho são propostas duas técnicas que permitem obter topologias claras, sem a presença de grandes áreas de material intermediário. Uma primeira técnica é de filtragem, onde o filtro é aplicado diretamente sobre os limites móveis do processo de programação matemática. A outra técnica é a de um controle de gradiente, inserido na formulação diretamente como uma série de restrições sobre os valores das variáveis de projeto.

A estratégia de filtragem utilizada neste trabalho é uma adaptação espacial do filtro de vizinhança fixa apresentado por (Swan & Kosaka, 1997), que considera vizinhos de aresta e de nó. No filtro original, cada vizinho de aresta é considerado um vizinho de primeira ordem e os vizinhos de vértices são considerados de segunda ordem. Para cada tipo de vizinho, existem pesos w_1 e w_2 com valores fixos. A expressão para esse filtro está apresentada na Eq. (8), onde V_i é o volume do elemento i .

$$\rho_i = \frac{\rho_i V_i + w_1 \sum_j \rho_j V_j + w_2 \sum_j \rho_j V_j}{V_i + w_1 \sum_j V_j + w_2 \sum_j V_j} \quad (8)$$

A desvantagem desse filtro é não ser espacial, sendo, assim, dependente da discretização do domínio. Propõe-se uma alternativa para tornar esse filtro espacial, utilizando o conceito de pesos lineares com a distância entre centróides. Com isso obtem-se a seguinte formulação

$$\begin{aligned} w_j &= \frac{R_{max} - R_{ij}}{R_{max}} \\ \bar{w} &= \frac{\sum_{j=1}^{nv} w_j}{nv} \\ \rho_i &= \frac{\rho_i V_i + \bar{w} \sum_{j=1}^{nv} \rho_j V_j}{V_i + \bar{w} \sum_{j=1}^{nv} V_j} \end{aligned} \quad (9)$$

onde nv é o número de vizinhos definidos, R_{max} é o raio de abrangência do filtro e \bar{w} é o peso médio, obtido pela média simples entre os pesos lineares relativos a cada vizinho. Os vizinhos são obtidos por uma varredura de raio fixo, em torno de cada elemento, o que torna esse filtro espacial e independente da discretização. O parâmetro ajustável dessa formulação é o raio de varredura. R_{ij} é a distância entre os centróides dos elementos i e j . A alteração proposta na Eq. (9) acrescenta o caráter espacial às características volumétricas da formulação original. Como o presente trabalho utiliza um algoritmo SLP de programação matemática, surge naturalmente a idéia de utilizar o processo de filtragem sobre os limites móveis de cada elemento e não sobre a densidade de cada elemento. Assim, a filtragem é aplicada sobre a programação matemática e não sobre o campo atual de densidades. Com isso, obtem-se um filtro espacial volumétrico embutido na rotina de otimização e não uma mudança artificial da distribuição de densidades da topologia. Isso implica em, uma vez calculados os limites móveis para cada variável de projeto, aplicar a filtragem sobre cada um dos limites, considerando os limites móveis dos vizinhos definidos. Obtem-se, assim, uma distribuição de limites móveis que impede o aparecimento da instabilidade de tabuleiro. De um modo grosseiro, o raio de abrangência do filtro já se constitui em um controle da complexidade da solução final, pois grandes raios de varredura implicam em variações mais suaves da variável de projeto ao longo do

domínio.

Esse processo de filtragem permite obter topologias sem instabilidades numéricas, mas não permite obter um controle efetivo sobre a complexidade final da topologia gerada no processo de otimização. A complexidade da topologia final está diretamente ligada à variação da variável de projeto (densidade) no domínio de projeto. Assim, um controle que permita impor valores limites de gradiente irá atuar sobre a complexidade final da topologia obtida. Para isso, é proposta a formulação

$$\begin{aligned}
 & Min \quad V(\rho^n) & (10) \\
 & Suj \quad \quad \quad f_k^T u_k \leq F_{lim_k} \\
 & \quad \quad \quad |\nabla \rho| \leq \nabla \rho_{lim} \\
 & k \quad = \quad 1..nc
 \end{aligned}$$

onde a restrição de gradiente é adicionada à formulação do problema de minimização aqui proposto, obtendo-se a formulação de minimização de volume com restrições de flexibilidade e de gradiente de densidade. Isso permite o controle da complexidade da topologia obtida, uma vez que o número de furos está relacionado com o gradiente da variável de projeto no domínio.

De um modo geral, podemos escrever o problema de programação linear na forma da Eq. (11) (Haftka & Gürdal, 1996),

$$\begin{aligned}
 & Min \quad c^T \rho & (11) \\
 & Suj \quad \quad \quad A\rho = w \\
 & \rho_{inf} \leq \rho \leq \quad \quad \rho_{sup}
 \end{aligned}$$

onde a função objetivo possui restrições lineares e limites móveis (ρ_{inf} e ρ_{sup}), que são introduzidos artificialmente de modo a impedir que variações exageradas da variável de projeto impliquem na invalidade das hipóteses de linearidade.

A formulação proposta tem como restrições: a flexibilidade referente a cada caso de carregamento e a variação da densidade ao longo do domínio. A restrição de flexibilidade é não-linear e implícita com relação à variável de projeto. Devido ao fato de ser utilizado um procedimento linear de solução do problema de otimização, faz-se necessário linearizar a restrição de flexibilidade. Isso é feito utilizando apenas os termos lineares de uma expansão em série de Taylor, de acordo com a Eq. (12).

$$F_k(\rho) = F_k(\rho_0) + \sum (\rho_i - \rho_0) \nabla F_k|_{\rho_0} \quad (12)$$

Agrupando-se na forma da Eq. (11), obtemos a restrição linearizada de flexibilidade, Eq. (13),

$$\nabla F_k|_{\rho_0} \rho \leq F_{lim_k} - F_k(\rho_0) + \sum \rho_0 \nabla F_k|_{\rho_0} \quad (13)$$

onde F_{lim_k} é a flexibilidade limite do caso de carregamento k .

Podemos definir o gradiente da variável de projeto de acordo com a Eq. (14),

$$\nabla \rho_{ij} = \frac{\rho_j - \rho_i}{l_{ij}} \quad (14)$$

onde i é o elemento central e j é um vizinho qualquer ($i \neq j$). l_{ij} é a distância entre os

centróides dos elementos i e j . O gradiente da variável de projeto é restringido de acordo com a Eq. (15),

$$|\nabla \rho_i| \leq \nabla \rho_{limite} \quad (15)$$

onde o gradiente do elemento i em relação ao elemento j é definido na Eq. (15) e $\nabla \rho_{limite}$ é o gradiente limite que se deseja impor à topologia. Reescrevendo a Eq. (15) na forma apresentada na Eq. (11), obtemos a Eq. (16).

$$\rho_j - \nabla_{lim} l_{ij} \geq \rho_i \geq \rho_j + \nabla_{lim} l_{ij} \quad (16)$$

O número de restrições de gradiente para cada elemento é dado pelo número de vizinhos definidos na vizinhança. Quanto maior o número de vizinhos, mais efetivo será este controle.

Esste controle de gradientes envolve um custo computacional bastante elevado, proporcional ao número de vizinhos escolhidos. Dessa forma, uma seleção de vizinhos próximos, que compartilhem arestas e/ou nós é aconselhada.

6. Resultados

Resultados obtidos com o uso da formulação de minimização de volume, juntamente com as técnicas de filtragem e controle de gradiente aqui propostas são demonstradas. As figuras aqui apresentadas seguem a mesma convenção de cores: quanto mais escuro o tom de cinza, maior a densidade ρ .

Para demonstrar a minimização de volume de uma viga engastada, de dimensões 8 x 5, conforme a Fig. 1, foi utilizada a estratégia de filtragem com um expoente de 1/8. O domínio foi discretizado com 5796 elementos triangulares com rotação de membrana, GT9. A flexibilidade limite foi imposta como sendo 30% da flexibilidade máxima da estrutura correspondente ao volume total. O volume final obtido corresponde a uma redução de 35% do volume total. A topologia final obtida é bem definida, com poucas regiões de material intermediário. A segunda imagem da Fig. 1 corresponde a distribuição de densidades no domínio. Devido ao fato do expoente da Eq. (6) não ser aplicado sobre a relação constitutiva, temos que as áreas escuras correspondem ao material base e as áreas claras são áreas em que a densidade atingiu o patamar mínimo especificado. Como pode ser verificado, o filtro impediu o aparecimento de qualquer instabilidade de tabuleiro.

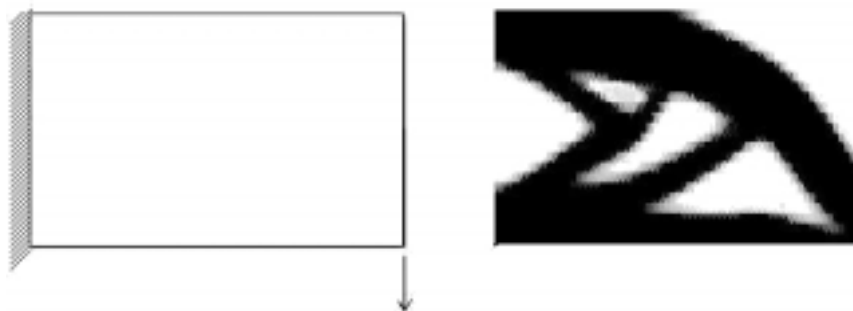


Figura 1: Geometria e condições de contorno. A topologia final corresponde a uma redução de 35% no volume.

Outro caso bastante discutido na literatura é apresentado na Fig. 2. As dimensões do domínio são as mesmas apresentadas na Fig. 1. Constitui-se em uma estrutura bi-apoiada com carregamento vertical. Foi imposta uma flexibilidade limite de 40% da flexibilidade inicial, juntamente com a estratégia de filtragem (expoente 1/8). Conforme pode ser verificado na Fig. 2, a topologia final é bem definida, não apresentando instabilidade de tabuleiro ou grandes áreas de densidade intermediária. As convergências da função objetivo e da restrição são estáveis. O volume final obtido corresponde a uma redução de 49,5% do volume inicial.

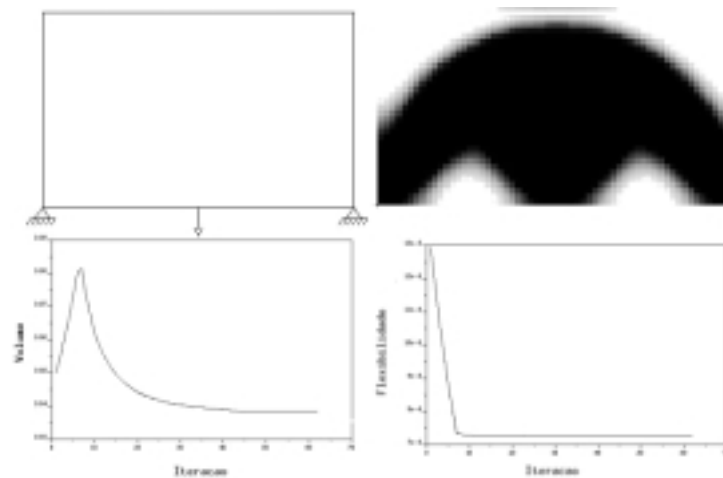


Figura 2: Estrutura bi-apoiada. Geometria, topologia final e convergência de volume e flexibilidades.

Outro exemplo encontrado na literatura é apresentado na Fig. 3. Foi calculada a resposta da estrutura da Fig. 3, cujo domínio é retangular de dimensões 1x1. A estrutura foi discretizada com 3600 elementos isoparamétricos bi-lineares de quatro nós. A segunda imagem da Fig. 3 representa a topologia obtida. Foi utilizada a estratégia de filtragem (expoente 1/8), obtendo-se uma redução de 68% no volume. O controle de gradiente,



Figura 3: Geometria e topologia obtida para o problema bi-apoiado com três cargas.

quando aplicado na estrutura da Fig.(1), com um valor que impeça a formação de ligações internas, leva à topologia da Fig. 4. O resultado obtido está de acordo com a estrutura ótima, conforme observado por (Bendsøe, 1994) e (Jog et al,1993), entre outros.

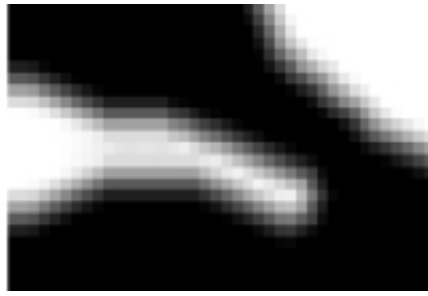


Figura 4: Topologia obtida com controle de gradiente.

7. Conclusões

Uma formulação de minimização de volume com restrição de flexibilidade foi apresentada. Esta formulação permite ajustar o grau de penalização da função objetivo, sem afetar a relação constitutiva. Essa formulação, juntamente com um filtro e um controle de gradientes aqui propostos, permite obter topologias bem definidas e sem a presença de instabilidades.

A presença de parâmetros tais como expoente de penalização, raio de abrangência do filtro e gradiente limite permitem controlar, em diferentes níveis, a complexidade final da topologia obtida. Casos presentes na literatura foram abordados, demonstrando a validade da formulação aqui apresentada.

Agradecimentos

Este trabalho tem o apoio financeiro da CAPES, através de uma bolsa de mestrado. Pesquisa desenvolvida junto ao Centro Nacional de Supercomputação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

REFERÊNCIAS

- Bendsøe, M, P, 1995, Optimization of Structural Toplogy, Shape, and Material, Springer-Verlag, New York.
- Díaz, A. R & Sigmund, O., 1995, Checkerboard Patterns in Layout Optimization, Structural Optimization, vol. 10, n. 1, pp. 40-45, August. National Laboratory Rept. 77-47.
- Fernandes, P. R. A, 1992, Optimização de Topologia em Estruturas Lineares e Elásticas Sujeitas a Solicitações Térmicas, Dissertação para obtenção do grau de mestre em Engenharia Mecânica, Universidade Técnica de Lisboa.
- Fonseca, J., S. O & Kikuchi N, 1998, Digital Imaging Filtering in Topology Optimization, Computational Mechanics New Trends and Applications, CIMNE, Barcelona.
- Haftka & Gürdal, R.T, 1996, Elements of Structural Optimization , Kluwer Academic Publishers, Boston.
- Hanson, R. J & K. L. Hierbert, 1981, A Sparse Linear Programming Subprogram, Report SAND81-0297, Sandia National Laboratories.

- Jog C. S, Haber R. B., Bendsøe M. P, 1993, Topology Design Optimized, Self-Adaptative Materials, International Journal for Numerical Methods in Engineer, vol. 37, pp. 1325-1350.
- Park, Y. K, 1995, Extensions of Optimal Layout Design Using the Homogenization Method, Ph.D. Thesis, University of Michigan.
- Swan, C. C. & Kosaka, I, 1997, Voigt-Reuss Topology Optimization for Structures with Linear Elastic Material Behaviours, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 40, pg. 3033-3057.
- Yuqiu, L & Yin, X, 1994, Generalized Conforming Triangular Membrane Element with Vertex Rigid Rotational Freedoms, Finite Elements in Analysis and Design, 17, pg. 259-271.

REDUCTION OF INTERMEDIATE DENSITY VALUES IN STRUCTURAL TOPOLOGY OPTIMIZATION

Abstract One of the shortcomings of the structural topology optimization is the appearance of regions with intermediate values for the design variable and checkerboards. The existence of these areas presents an obstacle to the uniqueness of the interpretation of the design. Among the many techniques to deal with this problem one can list penalty factors in the cost function or the constitutive equation, and the use of digital imaging algorithms to restrict the gradient of the design variable. This work presents a topology optimization approach to minimize the structure's volume while constraining the compliance, using a density approach. A penalized cost function is introduced to reduce the intermediate density area, and it is shown to be effective even without any filtering. Checkerboarding is avoided by using lower order elements combined with filtering. Two filtering strategies are shown: a gaussian-like "averaging" filter and a direct spatial gradient constraint. The results are presented comparing the effectiveness of each technique against the literature.

Keywords: *Optimization, Topology, Filtering, Gradient Control*